Reglas de derivación

Jesús García de Jalón de la Fuente

IES Ramiro de Maeztu
Madrid

2020

Derivada de la suma y de la diferencia

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(u-v)' = u' - v'$$

- Producto de una constante por una función:

$$(ku)' = ku'$$

- Producto de dos funciones $$f(x) = u \cdot v \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = u'v + v'u$$

  En efecto:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}\, v(x) + \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h}\, u(x+h) \\
&= u'v + v'u
\end{aligned}$$

Derivada del cociente

- Denominador constante:

$$\left(\frac{u}{k}\right)' = \frac{u'}{k}$$

- Numerador constante:

$$\left(\frac{k}{v}\right)' = \frac{-kv'}{v^2}$$

- Cociente de dos funciones:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

Derivada de la función compuesta

Sea la función $f[u(x)]$:

$$(f[u(x)])' = f'(u) \cdot u'(x)$$

Cuando x cambia en Δx la función $u(x)$ se incrementa en la cantidad $\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x)$.

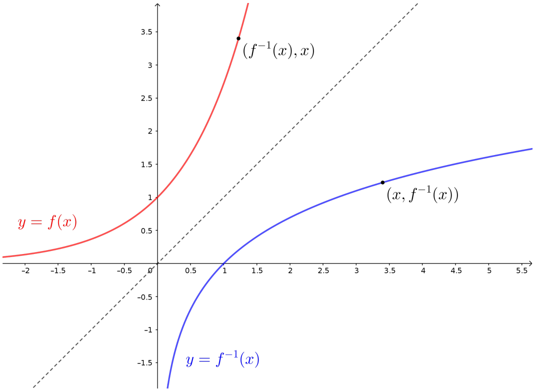
Y cuando u cambia en la cantidad Δu, la función f se incrementa en la cantidad $\Delta f = f(u + \Delta u) - f(u)$.

Entonces:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \\ &= f'(u)u'(x) \end{aligned}$$

Derivada de la función inversa

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$



Por ejemplo:

$$\begin{cases} f(x) = \operatorname{sen} x \\ f'(x) = \cos x \\ f'(\operatorname{arsen} x) = \cos(\operatorname{arsen} x) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad (\operatorname{arsen} x)' = \frac{1}{\cos(\operatorname{arsen} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arsen} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Derivada de las funciones potenciales

$$(x^n)' = nx^{n-1} \qquad (u^n)' = nu^{n-1}u'$$

$$\left(x^2\right)' = 2x \qquad \left(u^2\right)' = 2uu'$$

$$\left(x^3\right)' = 3x^2 \qquad \left(u^3\right)' = 3u^2u'$$

$$\left(x^4\right)' = 4x^3 \qquad \left(u^4\right)' = 4u^3u'$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \qquad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Derivada de las funciones exponenciales y logarítmicas

$$(e^x)' = e^x \qquad (e^u)' = e^u u'$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (a^u)' = a^u u' \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$$

Derivada de las funciones circulares

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x \qquad (\operatorname{sen} u)' = \cos u \cdot u'$$

$$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x \qquad (\cos u)' = -\operatorname{sen} u \cdot u'$$

$$(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\operatorname{tg} u)' = (1 + \operatorname{tg}^2 u) \cdot u' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x) = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \qquad (\operatorname{cotg} u)' = -(1 + \operatorname{cotg}^2 u) \cdot u' = -\frac{u'}{\operatorname{sen}^2 u}$$

Derivada de las funciones circulares inversas

$$(\operatorname{arsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\operatorname{arsen} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(\operatorname{arcos} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\operatorname{arcos} u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(\operatorname{artg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{artg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$