

# Probabilidad

Jesús García de Jalón de la Fuente

IES Ramiro de Maeztu  
Madrid

2020

Experimentos como los de lanzar un dado, tirar una moneda, sacar una carta de la baraja, etc, se llaman **experimentos aleatorios**.

Se caracterizan por:

- Cuando se realizan una sola vez no puede predecirse el resultado.
- Cuando el experimento se repite muchas veces pueden hacerse predicciones sobre las frecuencias de los distintos resultados. Estas frecuencias se llaman **probabilidades**.

# Elementos de un experimento aleatorio

Para describir matemáticamente un experimento aleatorio necesitamos:

- El **espacio muestral** que es el conjunto formado por los resultados posibles del experimento.
- Una **función de probabilidad** que asocia a cada elemento del espacio muestral un número comprendido entre 0 y 1 (su probabilidad). La suma de todas las probabilidades debe ser igual a 1.

Por ejemplo, en el experimento de lanzar un dado, el espacio muestral sería:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Si el dado es simétrico, a cada uno de estos resultados se les asocia una probabilidad igual a  $\frac{1}{6}$ .

Distinguimos tres formas de asignar probabilidades:

- Atendiendo a la **simetría** del experimento. Por ejemplo, en muchos juegos de azar se asigna la misma probabilidad a todos los resultados.
- De forma **empírica**, repitiendo el experimento muchas veces. Las frecuencias relativas se toman como probabilidades.
- Por medio de un **modelo teórico**. Estos modelos se llaman distribuciones de probabilidad.

Un **suceso**  $S$  es un subconjunto del espacio muestral  $E$ .

Por ejemplo en el espacio muestral  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ :

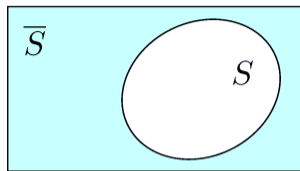
$$A = \text{«obtener un resultado par»} = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \text{«obtener un número mayor que 2»} = \{3, 4, 5, 6\}$$

El espacio muestral considerado como subconjunto de sí mismo se llama **suceso seguro**.

El **suceso imposible** es el que no tiene ningún elemento.

La probabilidad de un suceso es la suma de las probabilidades de los resultados que lo componen.



El conjunto de resultados de  $E$  que no están en  $S$  se llama **suceso contrario** de  $S$  y se representa mediante  $\bar{S}$  o  $S'$ :

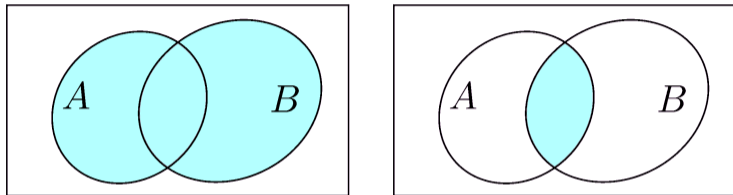
$$A = \{2, 4, 6\} ; \quad \bar{A} = \{1, 3, 5\}$$

$$B = \{3, 4, 5, 6\} ; \quad \bar{B} = \{1, 2\}$$

La probabilidad del suceso contrario es:

$$p(\bar{S}) = 1 - p(S)$$

# Unión e intersección de sucesos

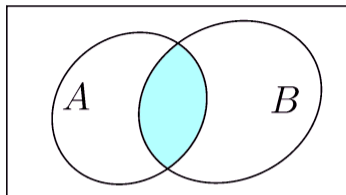
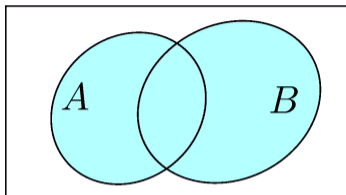


El suceso  $A \cup B$  está formado por los resultados que están en  $A$  o en  $B$ .

El suceso  $A \cap B$  está formado por los resultados que están en  $A$  y en  $B$ .

Si  $A \cap B$  es el suceso imposible,  $A$  y  $B$  son **incompatibles**.

# Unión e intersección de sucesos



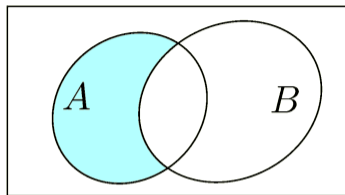
Los sucesos  $A \cup B$  y  $A \cap B$  cumplen que:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Además verifican las relaciones de **de Morgan**:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$





La **diferencia** de  $A$  y  $B$  es el conjunto de elementos de  $A$  que no pertenecen a  $B$ . Se representa por  $A - B$  o  $A \cap \bar{B}$ .

La probabilidad de la diferencia de sucesos es:

$$p(A - B) = p(A) - p(A \cap B)$$

# Espacios equiprobables. Regla de Laplace

En muchos experimentos todos los resultados del espacio muestral tienen la misma probabilidad. En este caso, el espacio se llama **equiprobable**.

Si el espacio tiene  $n$  resultados posibles, la probabilidad de cada uno de ellos es:

$$p = \frac{1}{n}$$

La probabilidad de un suceso  $A$  de  $m$  resultados es:

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{n}^\circ \text{ de resultados del suceso}}{\text{n}^\circ \text{ total de resultados}}$$

Esta fórmula se suele recordar de la siguiente forma: la probabilidad es igual al número de casos favorables dividido entre el número de casos posibles (**regla de Laplace**).

Se lanza una moneda tres veces:

- (a) Escribir el espacio muestral.
- (b) Calcular la probabilidad de obtener exactamente una cruz.

## Solución:

Llamando a los resultados  $C$  (cara) y  $X$  (cruz), los posibles resultados son:

$$E = \{CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX\}$$

Todos los resultados son igualmente probables. Entonces:

$$p(\text{«obtener exactamente una cruz»}) = \frac{3}{8}$$



En una clase de 25 estudiantes, 15 estudian francés, 13 estudian malayo y 5 no estudian ninguna lengua. Si se escoge un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que estudie francés y malayo?

## Solución:

Llamemos  $F$  = «el elegido estudia francés»,  $M$  = «el elegido estudia malayo». Los datos son:

$$p(F) = \frac{15}{25}; \quad p(M) = \frac{13}{25}; \quad p(\overline{F} \cap \overline{M}) = \frac{5}{25}$$

Entonces:

$$p(\overline{F} \cap \overline{M}) = p(\overline{F \cup M}) = 1 - p(F \cup M) = \frac{5}{25} \implies p(F \cup M) = \frac{20}{25}$$

$$p(F \cap M) = p(F) + p(M) - p(F \cup M) = \frac{15}{25} + \frac{13}{25} - \frac{20}{25} = \frac{8}{25}$$



Gracias por vuestra atención