Cálculo de límites

Jesús García de Jalón de la Fuente

IES Ramiro de Maeztu
Madrid

2020

682. Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to 2}(3x^2 - x + 5) = 3 \cdot 2^2 - 2 + 5 = 15$

(b) $\lim_{x\to\infty}(3x^2 - x + 5) = \lim_{x\to\infty} 3x^2 = \infty$

(c) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} + 3\right) = \frac{1}{4} + \infty + 3 = \infty$

(d) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} + 3\right) = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty} + 3 = 0 + 0 + 3 = 3$

683. Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2-4x+4} = \infty$

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2-4x+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\infty} = 0$

(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+5x^2+x-1}{3x^2+4x+2} \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{3x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{3} = \infty$

(d) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{5x^4+3x^3+2x^2+x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{5x^4} = \frac{1}{5}$

684. Calcular los siguientes límites:

$$(a)\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{3x^3-2x^2+6x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{3x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{3} = \infty$$

$$(b)\ \lim_{x\to 2} \frac{x^3-6x^2+x+14}{x^3+x^2+2} = \frac{0}{14} = 0$$

$$(c)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^3-6x^2+6}{x^4-x^3+x-1} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$(d)\ \lim_{x\to 0} \frac{3x^4}{x^3+x^2}\left(=\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{3x^4}{x^2(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{x+1} = \frac{0}{1} = 0$$

685. Calcular los siguientes límites:

$$(a)\ \lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x^2-5x}\left(=\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)x}=\lim_{x\to 5}\frac{x+5}{x}=2$$

$$(b)\ \lim_{x\to -3}\frac{x^3+5x^2+10x+12}{x^3+2x^2-2x+3}\left(=\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x^2+2x+4)}{(x+3)(x^2-x+1)}=\lim_{x\to -3}\frac{x^2+2x+4}{x^2-x+1}=\frac{7}{13}$$

$$(c)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^4-2x^3+x-2}{x^3+4x^2-11x-2}\left(=\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^3+1)}{(x-2)(x^2+6x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3+1}{x^2+6x+1}=\frac{9}{17}$$

$$(d)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^4+4x^3+5x^2+4x+4}{x^4+4x^3+4x^2}\left(=\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)^2(x^2+1)}{(x+2)^2x^2}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+1}{x^2}=\frac{5}{4}$$

686. Calcular los siguientes límites:

$$(a)\ \lim_{x\to -3} \frac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+7x^2+15x+9} \left(= \frac{0}{0}\right) \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)^2(x-1)}{(x+3)^2(x+1)} = \lim_{x\to -3} \frac{x-1}{x+1} = 2$$

$$(b)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^4-6x^2+8x-3}{x^4-2x^3+2x-1} \left(= \frac{0}{0}\right) \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^3(x+3)}{(x-1)^3(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+3}{x+1} = 2$$

$$(c)\ \lim_{x\to 2} \left(\frac{x-2}{x^2-4} - \frac{x^2-4}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{x+2}{1}\right) = \frac{1}{4} - 4 = -\frac{15}{4}$$

$$(d)\ \lim_{x\to \sqrt{5}} \frac{x-\sqrt{5}}{x^2-5} \left(= \frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to \sqrt{5}} \frac{x-\sqrt{5}}{(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})} = \lim_{x\to \sqrt{5}} \frac{1}{x+\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

687. Calcular los siguientes límites:

(a)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}\left(=\frac{0}{0}\right) &= \lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})}\\ &= \lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{x-5}\\ &= 20\sqrt{5}\end{aligned}$$

(b)
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}\left(=\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-1}=-1$$

(c)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-2}-x)(\sqrt{x^2-2}+x)}{\sqrt{x^2-2}+x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2-x^2}{\sqrt{x^2-2}+x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-2}{2x} = 0$$

(d)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+2})(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+2})}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-x^2-2}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

688. Calcular los siguientes límites:

$$(a) \quad \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^3-x^2+1}-\sqrt{x^3-x+1}\right)$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^3-x^2+1}-\sqrt{x^3-x+1})(\sqrt{x^3-x^2+1}+\sqrt{x^3-x+1})}{\sqrt{x^3-x^2+1}+\sqrt{x^3-x+1}}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-x^2+1-x^3+x-1}{2\sqrt{x^3}}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2}{2\sqrt{x^3}} = -\infty$$

$$(b) \quad \lim_{x\to 2^+} \left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{\sqrt{x-2}}\right) = \lim_{x\to 2^+} \left(\frac{1}{x-2}-\frac{\sqrt{x-2}}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2^+} \frac{1-\sqrt{x-2}}{x-2} = \infty$$

(c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)}{x(\sqrt{1-x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-x-1}{x(\sqrt{1-x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x(\sqrt{1-x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-1}{\sqrt{1-x}+1} = -\frac{1}{2}$$

(d) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x+1}{2x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x}{2x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} 2^x = 2^\infty = \infty$

689. Calcular los siguientes límites:

$$(a)\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+1}{2x^2}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x}{2x^2}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}\right)^{x^2}=0^{\infty}=0$$

(Atención: ∞^0 es una indeterminación, 0^∞ es cero.)

$(b)\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x}$ es una indeterminación del tipo 1^∞:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x} &= \lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{x-2}{x+1}-1\right)2x}\\ &= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{(x-2-x-1)2x}{x+1}}\\ &= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-6x}{x}}\\ &= e^{-6}\end{aligned}$$

(c) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^x$ También es del tipo 1^∞:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}-1\right)x}$$
$$= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{(x^2+1-x^2+2)x}{x^2-2}}$$
$$= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{3x}{x^2}} = e^0 = 1$$

(d) $\lim_{x\to 2} \left(\frac{x+2}{2x}\right)^{\frac{1}{x-2}}$ Aunque $x \to 2$ también es 1^∞

$$\lim_{x\to 2} \left(\frac{x+2}{2x}\right)^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x\to 2} e^{\left(\frac{x+2}{2x}-1\right)\cdot\frac{1}{x-2}}$$
$$= \lim_{x\to 2} e^{\frac{x-2x+2}{2x}\cdot\frac{1}{x-2}}$$
$$= \lim_{x\to 2} e^{\frac{2-x}{2x}\cdot\frac{1}{x-2}}$$
$$= \lim_{x\to 2} e^{\frac{-1}{2x}} = e^{-\frac{1}{4}}$$

690. Calcular los siguientes límites:

$$(a)\ \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$$

$$(b)\ \lim_{x\to\infty} \log_3 x = \infty$$

$$(c)\ \lim_{x\to\infty} \log_{1/2} x = -\lim_{x\to\infty} \log_2 x = -\infty$$

$$(d)\ \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

$$(e)\ \lim_{x\to 0^+} \log_5 x = -\infty$$

$$(f)\ \lim_{x\to 0^+} \log_{1/3} x = -\lim_{x\to 0^+} \log_3 x = \infty$$

$$(g)\ \lim_{x\to 0} \ln(1+x) = \ln 1 = 0$$

$$(h)\ \lim_{x\to 5} \log_5 x = \log_5 5 = 1$$

$$(i)\ \lim_{x\to 1} \log_3 x = \log_3 1 = 0$$

$$(j)\ \lim_{x\to\sqrt{3}} \log_3 \frac{1}{x} = \log_3 \frac{1}{\sqrt{3}} = \log_3 1 - \log_3 \sqrt{3} = -\frac{1}{2}$$

691. Calcular los siguientes límites:

(a) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+2}{x-2} = \infty$$

(b) $$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+5}{x^2+1} = 0$$

(c) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x+1}{x^3-3x^2+2x-1} = 1$$

(d) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-5x+2}{x^4-1} = 0$$

(e) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-3x^3+2}{4x^4+2} = \frac{1}{4}$$

(f) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5-3x^3+2x}{x^3-5x+6} = \infty$$

692. Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - 1}{x^2} = \infty$

(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2x + 3}{1 + e^x} = 0$

(d) $\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{3^x} = 0$

(e) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2^x + x} = \infty$

(f) $\lim_{x\to\infty} \frac{5^x}{3^x} = \infty$

693. Calcular los siguientes límites:

(*a*) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

(*b*) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{5\ln x} = \infty$

(*c*) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{e^x} = 0$

(*d*) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$

(*e*) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\ln x} = 0$

(*f*) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$ no existe

694. Calcular los siguientes límites:

$$(a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

$$(b)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{3} = 0$$

$$(c)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arsen} x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x} = \infty$$

$$(d)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\operatorname{artg} x} \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

$$(e)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{-\frac{x^2}{2}} = -2$$

$$(f)\ \lim_{x\to 0} \frac{x + \operatorname{tg} x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

695. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}\right)^{x+1}$$

según los valores del parámetro α.

Solución:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}\right)^{x+1} &= \lim_{x\to\infty} e^{\left(1+\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}-1\right)(x+1)}\\ &= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{x+1}{\alpha x^2+4x+8}}\end{aligned}$$

Si $\alpha \neq 0$ el denominador es de mayor grado que el numerador. El límite de la fracción es cero y el límite es $e^0 = 1$. Si $\alpha = 0$ el numerador y denominador son del mismo grado. La fracción tiende a $\frac{1}{4}$ y el limite es igual a $e^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{e}$.

Gracias por vuestra atención